



Paper Type: Original Article



Evaluating the Efficiency of Qazvin Schools Using the Data Envelopment Analysis Technique with the Help of a Give-and-Take Approach Combining Volumetric and Proportional Inputs and Outputs

Amir Rahmani* *Department of Basic Sciences, Takestan Branch, Islamic Azad University, Takestan, Iran; rahmani.amir@yahoo.com.*

Citation:



Rahmani, A. (2024). Evaluating the efficiency of Qazvin schools using the data envelopment analysis technique with the help of a give-and-take approach combining volumetric and proportional inputs and outputs. *Applied studies in educational management and e-learning*, 1(1), 28-34.

Received: 14/08/2024

Reviewed: 20/09/2024

Revised: 28/10/2024

Accepted: 16/01/2025

Abstract

Purpose: Data Envelopment Analysis (DEA) is a mathematical programming technique with multiple inputs and outputs. In DEA, it is assumed that the inputs and outputs can have any non-negative real value. However, in DEA applications, the inputs and outputs that represent the environmental and qualitative characteristics of the production process are often expressed as percentages, ratios, and averages, which are called ratio indices.

Methodology: In traditional DEA models, assuming constant and Variable Returns to Scale (VRS), such relative indices cannot be properly combined.

Findings: In this research, new efficiency evaluation models with ratio and volume indices, which are an extension of traditional models assuming constant and VRS, are introduced by means of production trade-offs between volume-ratio inputs and outputs. In order to show the importance of the issue, we evaluate the efficiency of Qazvin's secondary schools (first cycle) using the introduced models.

Originality/Value: The results show that the introduced models have the ability to evaluate the efficiency of Qazvin schools, while traditional models do not have the ability to accurately evaluate the efficiency of Qazvin schools due to the existence of relative indicators and trade-offs between them.

Keywords: Data envelopment analysis, Production technology, Relative inputs and outputs, Production trade-offs, Qazvin schools.



Corresponding Author: rahmani.amir@yahoo.com

<https://doi.org/10.48313/asemel.v1i1.80>

Licensee. **Applied Studies in Educational Management and E-Learning**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



مطالعات کاربردی در مدیریت آموزشی و یادگیری الکترونیکی

دوره ۱، شماره (۱)، (۱۴۰۳)، ۲۸-۳۴

www.aseinel.reapress.com



6

نوع مقاله: پژوهشی

ارزیابی کارایی مدارس قزوین با استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها به کمک رویکرد بده‌بستان با ترکیب ورودی و خروجی‌های حجمی و نسبیتی

امیر رحمانی*

گروه علوم پایه، واحد تاکستان، دانشگاه آزاد اسلامی، تاکستان، ایران.

چکیده

هدف: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک تکنیک بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی با چندین ورودی و خروجی است. در DEA فرض می‌شود که ورودی و خروجی‌ها می‌توانند هر مقدار حقیقی نامنفی را داشته باشند؛ اما در کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها، ورودی‌ها و خروجی‌ها که نمایانگر ویژگی‌های محیطی و کیفی فرآیند تولید هستند، اغلب به صورت درصد، نسبت و میانگین بیان می‌شوند که به آن‌ها شاخص‌های نسبیتی گفته می‌شود.

روش‌شناسی پژوهش: در مدل‌های سنتی DEA با فرض بازده به مقیاس ثابت و متغیر نمی‌توان به درستی چنین شاخص‌های نسبیتی را ترکیب نمود.

یافته‌ها: در این پژوهش، مدل‌های جدید ارزیابی کارایی با شاخص‌های نسبیتی و حجمی که توسعه‌ای از مدل‌های سنتی با فرض بازده به مقیاس ثابت و متغیر هستند، به وسیله بده-بستان تولید بین ورودی‌ها و خروجی‌های نسبیتی حجمی، معرفی و به منظور نشان دادن اهمیت موضوع به وسیله مدل‌های معرفی شده، به ارزیابی کارایی مدارس مقطع متوسطه (دوره اول) قزوین می‌پردازیم.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نتایج نشان می‌دهد که مدل‌های معرفی شده توانایی ارزیابی کارایی مدارس قزوین را دارند، در حالی که مدل‌های سنتی به دلیل وجود شاخص‌های نسبیتی و بده-بستان بین آن‌ها توانایی ارزیابی دقیق کارا بودن مدارس قزوین را ندارند.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، تکنولوژی تولید، ورودی و خروجی‌های نسبیتی، بده-بستان تولید، مدارس قزوین.

۱- مقدمه

در کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها^۱ برخی ورودی و خروجی‌ها در قالب نسبت‌ها بیان می‌شوند. چنین نسبت‌هایی ممکن است نشان‌دهنده درصدها و نسبت‌های مختلفی باشد که از تقسیم اندازه‌های حجمی به دست می‌آیند و مقادیر آن‌ها اغلب برای تحلیل‌گر ناشناخته است. به عنوان مثال، در زمینه آموزش و پرورش معیارهای نسبیتی ممکن است نشان‌دهنده درصدی از دانش‌آموزان باشند که در امتحانات به نتایج خوبی دست

^۱ Data Envelopment Analysis (DEA)

یافته‌اند، در حالی که تعداد آن‌ها به‌طور دقیق مشخص نشده است [3-1]. دو مدل استاندارد *DEA* مبتنی بر مفروضات بازده به مقیاس ثابت^۱ و متغیر^۲ هستند که به ترتیب توسط چارنز و همکاران [4] و نیز توسط بنکر و همکاران [5] معرفی شده‌اند. اگر ورودی و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده به صورت نسبی باشند، این مدل‌ها ممکن است ارزیابی دقیقی از کارایی ارائه ندهند [6].

به عنوان مثال در مقاله امروز نژاد و امین [7] تکنولوژی‌های تولید با داده‌های نسبی به‌طور کلی فرض تحذب گنجانده شده در تکنولوژی‌های *CRS* و *VRS* را برآورده نمی‌کنند. به منظور غلبه بر مشکلات بیان شده برای داده‌های نسبی در *DEA*، اولسون و همکاران [8] تکنولوژی جدید (*R-VRS*) *VRS* را معرفی کردند که داده‌های حجمی و نسبی را به‌طور هم‌زمان در تکنولوژی تولید در نظر می‌گیرد.

در مدل‌های سنتی *DEA* با فرض *VRS* معمولاً یک تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها برای قابل قبول بودن تفکیک‌پذیری واحدهای تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شوند [1]. از آنجایی که تکنولوژی *R-VRS* زیرمجموعه‌ای از *VRS* سنتی است که بر اساس داده‌های ورودی و خروجی یکسان (شامل داده‌های نسبت) است، امتیازات کارایی تنها در صورت انتقال از دومی به اولی می‌تواند افزایش یابد. بنابراین، قدرت تفکیک‌پذیری مدل *R-VRS* به‌طور کلی بدتر از مدل *VRS* است. یک روش مناسب در مواجهه با این مشکل استفاده از ترکیب ارزش‌های مشخص در تکنولوژی تولید، از طریق مشخص کردن بده-بستان تولید است.

این روش ابتدا توسط پودینوفسکی [9] به عنوان اشکال دوگانه محدودیت وزن در مدل‌های مضربی *VRS* توسعه یافت. چنین بده-بستان‌های تولیدی به عنوان تغییرات هم‌زمان در ورودی‌ها یا خروجی‌ها تفسیر می‌شوند که از نظر تکنولوژی برای هر واحد تصمیم‌گیرنده^۳ در تکنولوژی ممکن فرض شوند. چنین بده بستان تولید، منجر به گسترش کنترل شده و معنی‌دار تکنولوژی تولید می‌شود که کاهش امتیاز کارایی و افزایش تکنیک‌پذیری را در پی دارد. در پژوهش حاضر ضمن معرفی صورت گسترش‌یافته‌ای از مدل *R-VRS* [10]، کاربرد و قدرت تفکیک‌پذیری آن را با تعریف بده-بستان ورودی‌ها و خروجی‌های حجمی و نسبی برای ارزیابی کارایی مدارس قزوین مورد استفاده قرار می‌دهیم.

۲- نمادگذاری

فرض کنید $T \in R_+^{m+s}$ تکنولوژی تولید با یک مجموعه از ورودی به صورت $I = \{1, 2, \dots, m\}$ و یک مجموعه از خروجی به صورت $O = \{1, 2, \dots, s\}$ باشد که هر دو مجموعه می‌توانند شامل داده‌های حجمی یا نسبی باشند. فرض کنید که O^V, I^V به ترتیب زیرمجموعه‌های ورودی و خروجی‌های حجمی باشند و O^R, I^R به ترتیب زیرمجموعه‌های ورودی و خروجی‌های نسبی باشند.

همچنین داریم $O \neq \emptyset$ و $I \neq \emptyset$ و $O = O^V \cup O^R$ و $I = I^V \cup I^R$ و هیچ داده‌ای نمی‌تواند هم‌زمان حجمی و نسبی باشد. تعداد ورودی‌های حجمی و نسبی و خروجی‌های حجمی و نسبی را به ترتیب با نمادهای m^V, s^V, m^R, s^R نمایش می‌دهیم. هر واحد تصمیم‌گیرنده به صورت $(X, Y) = (X^V, X^R, Y^V, Y^R)$ نمایش داده می‌شود که در آن X^V, X^R, Y^V, Y^R به ترتیب معرف بردارهای ورودی و نسبی و بردارهای خروجی حجمی و نسبی هستند. همچنین تعداد واحدهای تصمیم‌گیری مشاهده شده برابر با n و مجموعه اندیس نمایش‌دهنده *DMUs* را به صورت $J = \{1, 2, \dots, n\}$ معرفی می‌شود.

در بیشتر مسایل کاربردی شاخص‌های نسبی یک کران بالا به صورت ۱ یا ۱۰۰٪ دارند. $\bar{Y}^R, \bar{X}^R$ را به ترتیب بردارهای کران مربوط ورودی و خروجی‌های نسبی در نظر می‌گیریم. اگر برای یک مولفه از بردارهای ورودی و یا خروجی کران بالا وجود نداشته باشد، در این صورت مولفه متناظر از بردارهای کران را $+\infty$ در نظر می‌گیریم.

^۱ Constant Returns to Scale (CRS)

^۲ Variable Returns to Scale (VRS)

^۳ Decision Making Unit (DMU)

۳- معرفی تکنولوژی $R - VRS$

اولسن و همکاران [8] یک تکنولوژی $R-VRS$ که در اصول مطرح شمول مشاهدات، امکان‌پذیری و تحدب برای واحدهای تصمیم‌گیری صدق می‌کرد به صورت زیر معرفی نمودند:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j^V &\leq X^V, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j^V &\geq Y^V, \\ \lambda_j (X_j^R - X^R) &\leq 0, \\ \lambda_j (Y_j^R - Y^R) &\geq 0, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ X^R &\leq \bar{X}^R, \\ Y^R &\leq \bar{Y}^R, \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

۴- بده-بستان تولید

در مورد تکنولوژی متعارف VRS بده-بستان تولید به محدودیت‌های وزنی در مدل ضربی مبتنی بر این تکنولوژی محدود می‌شود [1]. هدف گسترش مفهوم بده-بستان به تکنولوژی $R-VRS$ است. توجه می‌کنیم که تکنولوژی $R-VRS$ عموماً محدب نیست و مدل پوششی ورودی محور یا خروجی محور آن به صورت برنامه‌ریزی خطی نیستند؛ لذا فاقد فرم مضربی بوده و باید بده-بستان تولید برای تکنولوژی $R-VRS$ بدون اشاره به محدودیت‌های وزنی معرفی شود. بده-بستان تولید بین ورودی و خروجی‌های حجمی که به ترتیب با نمادهای $P^V \in R^{m^V}$ و $Q^V \in R^{s^V}$ نمایش داده می‌شوند، تغییرات هم‌زمان بردارهای ورودی و خروجی حجمی $DMUs$ را در تکنولوژی توصیف می‌کنند. همچنین برای توصیف تغییرات هم‌زمان بردارهای ورودی و خروجی نسبتی $DMUs$ از نمادهای $P^R \in R^{m^R}$ و $Q^R \in R^{s^R}$ استفاده می‌شود.

اجزای این بردارها می‌توانند مثبت، منفی یا صفر باشند. هرگاه بده-بستان تولید بین ورودی‌ها و خروجی‌های حجمی K واحد تصمیم‌گیری و بده-بستان بین ورودی‌ها و خروجی‌های نسبتی L واحد تصمیم‌گیری وجود داشته باشند، بردارهای ورودی و خروجی مربوطه به صورت (P_t^V, Q_t^V) ، $t = 1, 2, \dots, K$ و (P_l^R, Q_l^R) ، $l = 1, 2, \dots, L$ نمایش داده می‌شوند. همچنین توجه می‌کنیم که بده-بستان تولید نشان‌دهنده تغییرات هم‌زمان تکنولوژی‌های امکان‌پذیر در بردارهای ورودی و خروجی است. نمادهای $\pi_t \geq 0$ ، $t = 1, 2, \dots, K$ و $\rho_l \geq 0$ ، $l = 1, 2, \dots, L$ را برای بیان نسبت‌های مورد استفاده در بده-بستان‌های شاخص‌های حجمی و نسبتی مورد استفاده قرار می‌دهیم. به این ترتیب اصل شدنی بودن به صورت زیر برای حالت بده-بستان تولید گسترش می‌یابد. فرض می‌کنیم که $(X^V, X^R, Y^V, Y^R) \in T$ ، واحدی به صورت $(\bar{X}^V, \bar{X}^R, \bar{Y}^V, \bar{Y}^R)$ قابل تعریف است که

$$\begin{aligned} \bar{X}^V &= X^V + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t^V, \\ \bar{Y}^V &= Y^V + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t^V, \\ \bar{X}^R &= X^R + \sum_{l=1}^L \rho_l P_l^R, \\ \bar{Y}^R &= Y^R + \sum_{l=1}^L \rho_l Q_l^R. \end{aligned} \quad (2)$$

همچنین با فرض اینکه $\bar{X}^V, \bar{X}^R, \bar{Y}^V, \bar{Y}^R \geq 0$ و زیر بردارهای $\bar{X}^R, \bar{Y}^R$ در کران‌های معرفی شده صدق می‌کنند، ملاحظه می‌شود که $(\bar{X}^V, \bar{X}^R, \bar{Y}^V, \bar{Y}^R) \in T$.

۵- تکنولوژی R-VRS با بده-بستان تولید

در این بخش تکنولوژی $R-VRS$ اولسون و همکاران [8]، با ترکیب بده بستان حجمی و نسبتی گسترش می‌یابد و با نماد T_{VRS-TO}^R نمایش داده می‌شود. این تکنولوژی به کمک محدودیت‌های زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j^V + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t^V \leq X^V, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j^V + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t^V \geq Y^V, \\
 & \lambda_j ([X_j^R + \sum_{l=1}^L \rho_{jl} P_l^R] - X^R) \leq 0, \quad \text{for all } j \in J, \\
 & \lambda_j ([Y_j^R + \sum_{l=1}^L \rho_{jl} Q_l^R] - Y^R) \geq 0, \quad \text{for all } j \in J, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & X^R \leq \bar{X}^R, \\
 & Y^R \leq \bar{Y}^R, \\
 & \lambda, \pi \geq 0, \rho_{jl} \geq 0, \quad \text{for all } j, l.
 \end{aligned} \tag{۳}$$

اگر همه ورودی‌ها و خروجی‌ها حجمی باشند، تکنولوژی به دست آمده همان تکنولوژی پودنسکی [10]، با بده-بستان خواهد بود؛ اما در حالت کلی، شرط سوم و چهارم برای بهبود ورودی‌ها و خروجی‌های نسبتی تک تک واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده می‌شوند. ρ_{jl} نسبت بده-بستان مولفه l از واحد تصمیم‌گیرنده j th را نشان می‌دهد. برای ارزیابی کارایی $DMU_o = (X_o, Y_o)$ در تکنولوژی T_{VRS-TO}^R کارایی شعاعی خروجی محور، برابر معکوس مقدار بهینه η^* است که از مدل خروجی محور $R-VRS$ زیر به دست می‌آید [11].

$$\begin{aligned}
 & \eta^* = \max \eta, \\
 & s. t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j^V + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t^V \leq X_o^V, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j^V + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t^V \geq \eta Y_o^V, \\
 & \lambda_j ([X_j^R + \sum_{l=1}^L \rho_{jl} P_l^R] - X_o^R) \leq 0, \quad \text{for all } j \in J, \\
 & \lambda_j ([Y_j^R + \sum_{l=1}^L \rho_{jl} Q_l^R] - \eta Y_o^R) \geq 0, \quad \text{for all } j \in J, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \eta Y_o^V \leq \bar{Y}^R, \\
 & \lambda, \pi \geq 0 \text{ و } \rho_{jl} \geq 0, \quad \text{for all } j, l, \eta.
 \end{aligned} \tag{۴}$$

۶- مثال کاربردی

۶-۱- ارزیابی قدرت کارایی مدارس قزوین

در این بخش با استفاده از مدل معرفی شده به ارزیابی کارایی ۳۰ مدرسه مقطع اول متوسطه استان قزوین می‌پردازیم. ورودی‌ها به صورت زیر می‌باشد:

۱. تعداد معلم‌های مدرسه (حجمی).
 ۲. هزینه‌های مدرسه (حجمی).
 ۳. درصد دانش آموزان مدرسه که با نمره خوب از پایه ششم وارد این مقطع می‌شوند (نسبتی).
 ۴. درصد دانش آموزانی که از طریق بهزیستی یا کمیته امداد رایگان ثبت‌نام می‌شوند (نسبتی) در نظر گرفته شده‌اند.
- همچنین خروجی‌ها به صورت زیر می‌باشد:

۱. تعداد دانش آموزان هر مدرسه (حجمی).
 ۲. درصد دانش آموزان فارغ‌التحصیل با معدل بالای ۱۷ (نسبتی).
 ۳. درصد دانش آموزان پذیرفته شده در نمونه دولتی یا استعداد درخشان مقطع دوم متوسطه (نسبتی) در نظر گرفته شده‌اند.
- اطلاعات ورودی‌ها و خروجی‌های این مدارس در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱- اطلاعات ورودی و خروجی مدارس.

Table 1- School input and output information.

مدرسه	ورودی ۱	ورودی ۲	ورودی ۳	ورودی ۴	خروجی ۱	خروجی ۲	خروجی ۳
فارابی	14	2675	78	9	127	31	8
سلمان فارسی	12	2285	74	7	105	33	10
سید ابوطالب تقوی	11	2155	76	8	110	37	5
شهدای مسیر اصفهان	8	1500	54	17	73	15	4
عرفان ۲	10	1955	66	10	102	24	5
وحدت	10	1855	71	7	77	36	11
میعاد	9	1675	75	7	70	38	14
شمیم	9	1730	72	10	85	34	12
شهید ایرج بهرامی	10	1930	71	13	99	30	12
شهید حسن ربانی	13	2585	83	3	131	41	13
شهید رجب شبستری	10	1546	74	9	109	38	6
صالحان	9	1391	73	10	114	24	7
عترت	13	2008	69	11	118	25	10
علوم و معارف اسلامی صدرا ۲	14	2164	73	9	125	39	8
مهر	9	1391	71	8	105	25	13
نواندیشان	14	2163	88	10	118	29	11
معراج	11	1700	72	9	111	38	11
متانت	13	2009	75	9	121	34	6
امام حسین	10	1547	70	7	108	39	12
شیخ طوسی	11	1700	74	10	113	27	7
شهید مدنی	12	1856	73	7	126	34	11
حضرت قاسم	13	2008	71	10	111	24	8
حافظ	12	1854	68	9	117	30	7
آرین	11	1701	70	8	129	34	12
قدس	10	1545	88	11	111	32	11
عصمت	11	1700	84	9	118	24	12
شایستگان	10	1545	70	10	116	34	13
رضی الوالدین	10	1547	76	7	114	27	6
حاجی میر صادقی	11	1699	83	11	115	21	11
آفرینش	10	1545	71	11	121	32	9

برای ارزیابی مدارس، از ۶ بده-بستان تولید به صورت زیر استفاده نموده ایم.

۱. بده-بستان ۱: هر مدرسه می تواند تعداد دانش آموزان را ۲۰ نفر افزایش دهد مشروط بر آنکه مدرسه ۱ معلم اضافی استخدام و بودجه مدرسه ۱۵۰ میلیون ریال افزایش یابد.
۲. بده-بستان ۲: در صورت نیاز کاهش هم زمان تعداد معلمان به میزان ۱ و تعداد دانش آموزان به میزان ۲۰ برای هر مدرسه از نظر فنی امکان پذیر است.
۳. بده-بستان ۳: نبود معلم در هر مدرسه (مرخصی یا بیماری یا هر دلیل دیگری) بودجه اضافی ۵۰ میلیون ریالی به مدرسه تحمیل می نماید. (هزینه معلم جایگزین و ...).
۴. بده-بستان ۴: اگر درصد دانش آموزان که با نمره خوب از پایه ششم به این مقطع وارد می شوند ۱٪ افزایش یابد، درصد دانش آموزان فارغ التحصیل با معدل بالای ۱۷ دست کم ۵٪/۰ و میزان دانش آموزان قبولی در مدارس نمونه دولتی یا استعداد درخشان مقطع متوسطه دوم باید حداقل ۲۵٪/۰ افزایش یابد.
۵. بده-بستان ۵: اگر میزان دانش آموزان مدرسه که با نمره خوب از پایه ششم وارد این مقطع می شوند ۱٪ کاهش یابد، میزان دانش آموزان فارغ التحصیل با معدل بالای ۱۷ و میزان پذیرفته شدگان مدارس نمونه دولتی و استعداد درخشان نباید بیشتر از همان ۱٪ کاهش یابد.
۶. بده-بستان ۶: اگر درصد دانش آموزان که از طریق بهزیستی یا کمیته امداد به صورت رایگان ثبت نام می شوند ۱٪ افزایش یابد، درصد دانش آموزان فارغ التحصیل با معدل بالای ۱۷ باید دست کم ۵٪/۰ و میزان دانش آموزان قبولی در مدارس نمونه دولتی یا استعداد درخشان مقطع متوسطه دوم باید حداقل ۲۵٪/۰ افزایش یابد.

با توجه به اطلاعات ورودی و خروجی مدارس از جدول ۱ و لحاظ کردن نحوه های مختلف بده-بستان تولید ذکر شده در بالا، به کمک نرم افزار لینگو کارایی مدارس مورد ارزیابی قرار گرفت که نتایج حاصل در جدول ۲ آورده شده است. مدارس با نمره کارایی ۱ کارا و سایر مدارس ناکارا هستند و مقدار درج شده معکوس میزان کارایی را نمایش می دهند.

جدول ۲- ارزیابی کارایی با ورودی و خروجی حجمی و نسبیتی در تکنولوژی R-VRS.

Table 2- Efficiency evaluation with volumetric and proportional input and output in R-VRS technology.

مدرسه	کارایی بدون بده-بستان	کارایی با بده- بستان I ₁ - I ₂	کارایی با بده- بستان I ₁ - I ₃	کارایی با بده- بستان I ₁ - I ₄	کارایی با بده- بستان I ₁ - I ₅	کارایی با بده- بستان I ₁ - I ₆
فارابی	1.01	1.01	1.01	1.01	1	1.01
سلمان فارسی	1.03	1.03	1.03	1.20	1	1.20
سید ابوطالب تقوی	1	1.17	1.17	1.17	1.17	1.17
شهدای مسیر اصفهان	1	1	1	1	1	1
عرفان ۲	1	1	1	1.19	1.19	1
وحدت	1.08	1.08	1.08	1	1.57	1.40
میعاد	1	1.25	1.25	1.40	1.62	1
شمیم	1	1.23	1.23	1.23	1.34	1.23
شهید ایرج بهرامی	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22
شهید حسن ربانی	1	1	1	1	1	1
شهید رجب شبستری	1.07	1.07	1.07	1	1.11	1.07
صالحان	1	1	1	1	1	1
عترت	1	1	1	1.09	1.10	1.09
علوم و معارف اسلامی صدرا ۲	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03
مهر	1	1	1	1	1.08	1
نواندیشان	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10
معراج	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16
متانت	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06
امام حسین	1	1	1	1	1	1
شیخ طوسی	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14
شهید مدنی	1	1	1	1	1.02	1
حضرت قاسم	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16	1.16

جدول ۲- ادامه.

Table 2- Continued.

مدرسه	کارایی بدون بده-بستان	کارایی با بده- بستان $I_1 - I_2$	کارایی با بده- بستان $I_1 - I_3$	کارایی با بده- بستان $I_1 - I_4$	کارایی با بده- بستان $I_1 - I_5$	کارایی با بده- بستان $I_1 - I_6$
حافظ	1	1	1	1.10	1.10	1.10
آرین	1	1	1	1	1	1
قدس	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09
عصمت	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09	1.09
شایستگان	1	1	1	1	1.04	1
رضی الوالدین	1	1	1	1	1.06	1
حاجی میر صادقی	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
آفرینش	1	1	1	1	1	1

ملاحظه می‌شود، بدون در نظر گرفتن بده-بستان تعداد ۱۶ مدرسه از ۳۰ مدرسه ذکر شده کارا تشخیص داده شده‌اند؛ اما زمانی که بده-بستان‌ها اعمال می‌شوند تعداد مدارس کارا کاهش می‌یابند. این نشان می‌دهد که بده-بستان‌ها قدرت تمایز مدل در تشخیص کارایی مدارس را بالا می‌برند. همچنین ملاحظه می‌شود مدارس شهدای مسیر اصفهان، شهید حسن ربانی، صالحان، امام حسین، آرین و آفرینش با تمام بده-بستان‌ها کارا تشخیص داده شده‌اند. بنابراین، عملکرد بهتری نسبت به سایر مدارس دارند.

در نهایت نتایج اجرای مدل نشان می‌دهد که این مدل توانایی ارزیابی کارایی با شاخص‌های حجمی و نسبتی و هر گونه بده-بستان بین شاخص‌های ورودی و خروجی را دارد. مدل معرفی شده کلی است یعنی اگر هیچ‌گونه بده-بستان بین شاخص‌ها وجود نداشته باشد، باز می‌توان از این مدل استفاده نمود. حتی اگر فقط شاخص‌های حجمی یا نسبتی به تنهای باشند، این مدل قادر به ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری می‌باشد.

منابع

- [1] Khezrimotlagh, D., Salleh, S., & Mohsenpour, Z. (2014). A new method for evaluating decision making units in DEA. *Journal of the operational research society*, 65(5), 694–707. <https://doi.org/10.1057/jors.2013.40>
- [2] Bowlin, W. F. (1998). Measuring performance: An introduction to data envelopment analysis (DEA). *The journal of cost analysis*, 15(2), 3–27. <https://doi.org/10.1080/08823871.1998.10462318>
- [3] Hollingsworth, B., & Smith, P. (2003). Use of ratios in data envelopment analysis. *Applied economics letters*, 10(11), 733–735. <https://doi.org/10.1080/1350485032000133381>
- [4] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [5] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
- [6] Thanassoulis, E., Boussofiane, A., & Dyson, R. G. (1996). A comparison of data envelopment analysis and ratio analysis as tools for performance assessment. *Omega*, 24(3), 229–244. [https://doi.org/10.1016/0305-0483\(95\)00060-7](https://doi.org/10.1016/0305-0483(95)00060-7)
- [7] Emrouznejad, A., & Amin, G. R. (2009). DEA models for ratio data: Convexity consideration. *Applied mathematical modelling*, 33(1), 486–498. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.11.018>
- [8] Olesen, O. B., Petersen, N. C., & Podinovski, V. V. (2015). Efficiency analysis with ratio measures. *European journal of operational research*, 245(2), 446–462. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.03.013>
- [9] Podinovski, V. V. (2004). Production trade-offs and weight restrictions in data envelopment analysis. *Journal of the operational research society*, 55(12), 1311–1322. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601794>
- [10] Podinovski, V. V., Wu, J., & Argyris, N. (2024). Production trade-offs in models of data envelopment analysis with ratio inputs and outputs: An application to schools in England. *European journal of operational research*, 313(1), 359–372. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.08.019>
- [11] Olesen, O. B., Papaioannou, G., & Podinovski, V. V. (2025). Constant returns-to-scale production technologies with fixed ratio inputs and outputs. *Journal of productivity analysis*, 63(1), 37–48. [10.1007/s11123-024-00734-2](https://doi.org/10.1007/s11123-024-00734-2)