

Paper Type: Original Article



Two-Stage Analysis of Students' Individual Performance in Mathematics Education: Application of the BCC Model and Examination of Environmental Factors with a Correlational Approach

Marzieh Khajehpour^{1,*}, Farhad Hosseinzadeh Lotfi¹

¹ Department of Mathematics, Research Sciences Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran; marzie.khajepur@iau.ac.ir; farhad@hosseinzadeh.ir.

Citation:



Khajehpour, M., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2025). Two-stage analysis of students' individual performance in mathematics education: Application of the BCC model and examination of environmental factors with a correlational approach. *Applied studies in educational management and e-learning*, 2(4), 224-233.

Received: 10/05/2025

Reviewed: 19/06/2025

Revised: 25/07/2025

Accepted: 23/09/2025

Abstract

Purpose: In this study, students' individual performance in mathematics was assessed using the input-oriented BCC model of data envelopment analysis. The data were extracted from a valid Portuguese student performance dataset and included 357 observations. The inputs were weekly study time, number of absences, number of previous failures, commuting time to school, and family size, and the output was the final grade of the second-year mathematics course.

Methodology: The results showed that the average efficiency was at an average level and a limited number of students were identified as efficient. In the second stage, the relationship between efficiency scores and environmental factors including first-year grade, school educational support, place of residence, gender, family educational support, parents' living situation, and free time after school was examined using Spearman's correlation coefficient.

Findings: The findings indicate that first-year grade has the strongest positive and significant relationship with efficiency. Also, urban residence, male gender, and the desire to continue studying at university showed a significant positive relationship. Receiving additional educational support from school had a significant negative relationship with efficiency, while other factors such as family support, parents' living situation, and free time after school did not show a significant effect.

Originality/Value: This study shows that students' individual efficiency in mathematics education is influenced by a combination of educational and environmental factors, and the results can be a basis for policy-making and targeted educational interventions.

Keywords: Data envelopment analysis, BCC model, Individual performance, Mathematics education, Spearman correlation with environmental factors.



Corresponding Author: marzie.khajepur@iau.ac.ir

<https://doi.org/10.48313/aseinel.v2i4.93>

Licensee. **Applied Studies in Educational Management and E-Learning**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



نوع مقاله: پژوهشی

تحلیل دومرحله‌ای کارایی فردی دانش‌آموزان در آموزش ریاضی: کاربرد مدل BCC و بررسی عوامل محیطی با رویکرد همبستگی

مرضیه خواجه‌پور^۱، فرهاد حسین‌زاده لطفی^۱

^۱گروه ریاضی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: در این پژوهش، کارایی فردی دانش‌آموزان در درس ریاضی با استفاده از مدل BCC ورودی محور تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی شد. داده‌ها از مجموعه معتبر عملکرد دانش‌آموزان پرتغال استخراج گردید و شامل ۳۵۷ مشاهده بود. ورودی‌ها عبارت بودند از زمان مطالعه هفتگی، تعداد غیبت‌ها، تعداد شکست‌های قبلی، زمان رفت‌وآمد به مدرسه و اندازه خانواده و خروجی، نمره نهایی درس ریاضی دوره دوم در نظر گرفته شد.

روش‌شناسی پژوهش: نتایج نشان داد، میانگین کارایی در سطح متوسطی قرار دارد و تعداد محدودی از دانش‌آموزان کارا تشخیص داده شدند. در مرحله دوم، رابطه امتیاز کارایی با عوامل محیطی شامل نمره دوره اول، حمایت آموزشی مدرسه، محل سکونت، جنسیت، حمایت آموزشی خانواده، وضعیت زندگی والدین و زمان آزاد بعد از مدرسه با استفاده از ضریب همبستگی اسپیرمن بررسی گردید.

یافته‌ها: یافته‌ها حاکی از آن است که نمره دوره اول قوی‌ترین رابطه مثبت و معنادار را با کارایی دارد. همچنین سکونت شهری، جنسیت مذکر و تمایل به ادامه تحصیل در دانشگاه رابطه مثبت معنادار نشان دادند. دریافت حمایت آموزشی اضافی از مدرسه رابطه منفی معنادار با کارایی داشت، در حالی که سایر عوامل مانند حمایت خانواده، وضعیت زندگی والدین و زمان آزاد بعد از مدرسه تاثیر معناداری نشان ندادند.

اصالت/ارزش افزوده علمی: این مطالعه نشان می‌دهد که کارایی فردی دانش‌آموزان در آموزش ریاضی تحت تاثیر ترکیبی از عوامل آموزشی و محیطی قرار دارد و نتایج می‌تواند مبنایی برای سیاست‌گذاری و مداخلات آموزشی هدفمند باشد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، مدل BCC، کارایی فردی، آموزش ریاضی، همبستگی اسپیرمن با عوامل محیطی.

۱- مقدمه

آموزش ریاضی به‌عنوان یکی از ارکان اصلی توسعه مهارت‌های شناختی، حل مساله و پیشرفت علمی در جوامع مدرن، جایگاه ویژه‌ای در نظام‌های آموزشی دارد. با این حال، عملکرد دانش‌آموزان در این درس تحت تاثیر عوامل متعدد فردی، خانوادگی و محیطی قرار می‌گیرد که فراتر از توانایی‌های ذاتی است. در سال‌های اخیر، اندازه‌گیری کارایی فردی دانش‌آموزان به‌عنوان رویکردی نوین در ارزیابی عملکرد تحصیلی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است؛ رویکردی که امکان شناسایی نقاط قوت و ضعف هر دانش‌آموز را در فرایند یادگیری فراهم می‌کند.

تحلیل پوششی داده‌ها^۱ به‌عنوان یکی از قدرتمندترین ابزارهای غیرپارامتریک برای سنجش کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری^۲ در شرایط چندورودی-چندخروجی، کاربرد گسترده‌ای در حوزه آموزش یافته است. مدل BCC^3 به دلیل در نظر گرفتن بازده به مقیاس متغیر و امکان ارزیابی کارایی فنی خالص، یکی از پرکاربردترین مدل‌های DEA در مطالعات آموزشی محسوب می‌شود. با وجود این، بیشتر پژوهش‌های پیشین بر ارزیابی کارایی در سطح مدارس، مناطق یا سیستم‌های آموزشی متمرکز بوده و بررسی کارایی در سطح فردی دانش‌آموزان کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

علاوه بر این، عوامل محیطی نظیر جنسیت، محل سکونت، وضعیت زندگی والدین، تمایل به ادامه تحصیل، حمایت آموزشی مدرسه و خانواده و زمان آزاد بعد از مدرسه می‌توانند نقش تعیین‌کننده‌ای در شکل‌گیری کارایی داشته باشند. بررسی رابطه این عوامل با کارایی فردی می‌تواند به درک عمیق‌تری از مکانیزم‌های عملکرد تحصیلی منجر شود. با این وجود، پژوهش‌های اندکی به‌صورت نظام‌مند از رویکرد دومرحله‌ای DEA (محاسبه کارایی در مرحله اول و تحلیل عوامل محیطی در مرحله دوم) استفاده کرده‌اند.

این پژوهش با هدف ارزیابی کارایی فردی دانش‌آموزان در درس ریاضی با استفاده از مدل BCC ورودی محور و شناسایی رابطه عوامل محیطی با امتیاز کارایی از طریق ضریب همبستگی اسپیرمن انجام شده است. داده‌ها از مجموعه معتبر عملکرد دانش‌آموزان پرتغال استخراج گردید و شامل ۳۵۷ مشاهده است. ورودی‌ها شامل زمان مطالعه، تعداد غیبت‌ها، تعداد شکست‌های قبلی، زمان رفت‌وآمد و اندازه خانواده و خروجی، نمره نهایی ریاضی دوره دوم در نظر گرفته شد.

این مطالعه با تمرکز بر سطح فردی و ترکیب DEA با تحلیل همبستگی، تلاش می‌کند تا خلا موجود در ادبیات پژوهشی را پر کند و به درک بهتری از عوامل موثر بر کارایی تحصیلی دست یابد. نتایج می‌تواند مبنایی برای سیاست‌گذاری آموزشی و طراحی مداخلات هدفمند در راستای بهبود عملکرد دانش‌آموزان باشد.

ساختار مقاله به این صورت است: بخش دوم به مرور ادبیات مرتبط می‌پردازد، بخش سوم روش‌شناسی را تشریح می‌کند، بخش چهارم نتایج را ارائه می‌دهد و بخش پنجم به بحث، نتیجه‌گیری و پیشنهادها اختصاص دارد.

۲- مروری بر ادبیات موضوع

آموزش ریاضی در نظام‌های آموزشی امروزی، فراتر از انتقال دانش فنی، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین ابزارهای پرورش تفکر انتقادی، استدلال منطقی و توانایی حل مسائل پیچیده شناخته می‌شود. این درس نه‌تنها پایه‌ای برای رشته‌های $STEM$ است، بلکه مهارت‌های شناختی لازم برای تصمیم‌گیری روزمره و پیشرفت شغلی را نیز شکل می‌دهد. با این حال، عملکرد دانش‌آموزان در ریاضی همیشه یکنواخت نیست و تفاوت‌های چشمگیری میان آن‌ها مشاهده می‌شود. این تفاوت‌ها تنها به استعداد فردی یا میزان تلاش محدود نمی‌شود؛ بلکه به مجموعه‌ای از عوامل ورودی و محیطی وابسته است که هر کدام به‌عنوان شاخص‌هایی برای ارزیابی کارایی عمل می‌کنند.

در این چارچوب، شاخص‌های ورودی منابع یا محدودیت‌هایی هستند که دانش‌آموز در فرایند یادگیری در اختیار دارد یا با آن مواجه است. زمان مطالعه هفتگی به‌عنوان یکی از شاخص‌های اصلی، نشان‌دهنده سطح تلاش و تعهد فردی است و افزایش آن معمولاً با بهبود عملکرد همراه است. تعداد غیبت‌ها به‌عنوان یک شاخص منفی، فرصت یادگیری را کاهش می‌دهد و تاثیر مستقیم بر کارایی دارد. تعداد شکست‌های قبلی نیز نشانگر تجربیات ناموفق گذشته است که می‌تواند اعتمادبه‌نفس و انگیزه را تحت‌تاثیر قرار دهد. زمان رفت‌وآمد به مدرسه، انرژی و زمان مفید دانش‌آموز را محدود می‌کند و اندازه خانواده به‌عنوان یک شاخص اجتماعی، میزان منابع و حمایت‌های موجود برای هر فرزند را نشان می‌دهد.

شاخص خروجی در آموزش ریاضی، عمدتاً نمره نهایی درس است که موفقیت تحصیلی را اندازه‌گیری می‌کند. این شاخص به‌تنهایی کافی نیست و باید با ورودی‌ها ترکیب شود تا کارایی واقعی (نسبت خروجی به ورودی) مشخص گردد. عوامل محیطی مانند جنسیت، محل سکونت (شهری یا

¹ Data Envelopment Analysis (DEA)

² Decision-Making Units (DMUs)

³ Banker-Charnes-Cooper (BCC)

روستایی)، وضعیت زندگی والدین، تمایل به ادامه تحصیل در دانشگاه، حمایت آموزشی مدرسه و خانواده، نمره دوره اول و زمان آزاد بعد از مدرسه نیز به عنوان شاخص های مکمل عمل می کنند. جنسیت گاهی تفاوت های عملکردی ایجاد می کند، محل سکونت دسترسی به منابع را تعیین می کند و حمایت آموزشی می تواند نقش جبرانی یا پیشگیرانه داشته باشد.

این مفاهیم و شاخص ها نشان می دهند که آموزش ریاضی یک فرایند چند بعدی است که نیازمند ارزیابی جامع و نسبی است. کارایی در این درس نه تنها نتیجه تلاش فردی، بلکه تعامل پیچیده این عوامل است و تحلیل آن می تواند به شناسایی الگوهای موثر در یادگیری کمک کند.

تحلیل پوششی داده ها بر پایه چند مفروض اولیه بنا شده است که رعایت آن ها برای تفسیر معتبر نتایج ضروری است. این مفروضات عبارت اند از:

۱. ورودی ها خروجی ها مقادیر مثبت دارند.
۲. ورودی ها نسبت به یکدیگر مستقل هستند؛ یعنی مقدار یک ورودی (مانند زمان مطالعه) به طور مستقیم مقدار ورودی دیگر (مانند تعداد غیبت ها) را تعیین نمی کند. این استقلال اجازه می دهد هر ورودی به صورت جداگانه بر کارایی اثر بگذارد.
۳. خروجی ها نسبت به یکدیگر مستقل هستند؛ یعنی تغییر در یک خروجی لزوماً به تغییر هم زمان خروجی دیگر منجر نمی شود.
۴. تمام واحدهای تصمیم گیری نسبت به یکدیگر مستقل هستند؛ یعنی عملکرد هر دانش آموز مستقل از عملکرد سایر دانش آموزان ارزیابی می شود.
۵. ورودی ها و خروجی ها مستقل از زمان هستند؛ یعنی داده ها مربوط به یک دوره زمانی ثابت هستند و رابطه ورودی-خروجی در طول زمان تغییر نمی کند.
۶. با افزایش هر یک از ورودی ها (در حالی که سایر متغیرها ثابت بمانند)، کارایی کاهش می یابد؛ در مقابل، با افزایش هر یک از خروجی ها، کارایی افزایش می یابد.

جهت گیری های مدل DEA عبارت اند از:

۱. مدل ورودی محور: هدف این است که با حداقل کردن ورودی ها (یعنی استفاده کمتر از منابع)، همان سطح خروجی را حفظ کنیم یا تولید کنیم. این جهت گیری در آموزش مناسب تر است، زیرا منابع دانش آموز محدود هستند.
۲. مدل خروجی محور: هدف حداکثر کردن خروجی ها با استفاده از همان مقدار ورودی هاست.

این مفروضات در مدل BCC ورودی محور که در این پژوهش استفاده شده، همگی برقرار هستند و امکان ارزیابی کارایی فنی خالص را بدون تاثیر پذیری از مقیاس فراهم می کنند.

مدل BCC : فرض کنید n واحد تصمیم گیری وجود دارد که هر واحد j ($j = 1, 2, \dots, n$) با استفاده از m ورودی مختلف، s خروجی تولید می کند. بردار ورودی واحد j با $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$ و بردار خروجی آن با $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})$ نشان داده می شود. مجموعه امکان تولید^۱ بر اساس مشاهدات موجود به صورت زیر تعریف می شود:

$$PPS = \left\{ (x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \forall j \right\}$$

برای ارزیابی کارایی واحد تحت بررسی k ، مدل BCC ورودی محور به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} & \min \theta_k, \\ & \text{s. t.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_k x_{ik} \forall i, \end{aligned}$$

¹ Production Possibility Set (PPS)

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk} \forall r,$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0,$$

در این مدل، θ_k نشان‌دهنده امتیاز کارایی واحد تحت بررسی k است. این متغیر بیانگر آن است که واحد k می‌تواند ورودی‌های خود را به نسبت k کاهش دهد بدون آن که خروجی‌اش کاهش یابد. اگر $\theta = 1$ و تمام اسلک‌های ورودی (s_i^-) و خروجی (s_r^+) برابر با صفر باشند، واحد k کارا محسوب می‌شود. در غیر این صورت، واحد k ناکارا بوده و مقدار $1 - \theta_k$ ن‌دهنده میزان ناکارایی آن واحد است.

تحلیل پوششی داده‌ها از زمان معرفی به‌عنوان ابزاری غیرپارامتریک برای سنجش کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری در محیط‌های چندورودی-چندخروجی شناخته شده است. مدل CCR که بازده به مقیاس ثابت را فرض می‌کند، پایه‌ای برای توسعه مدل BCC شد که با در نظر گرفتن بازده به مقیاس متغیر، امکان ارزیابی کارایی فنی خالص را فراهم می‌کند. این مدل به دلیل انعطاف‌پذیری در تحلیل داده‌های واقعی، در حوزه آموزش کاربرد گسترده‌ای یافته است [1]. در ادبیات آموزش، DEA عمدتاً برای ارزیابی کارایی در سطوح نهادی (مدارس، دانشگاه‌ها، دانشکده‌ها) به کار رفته است [2]. برای سنجش کارایی دانشگاه‌ها و دانشکده‌ها استفاده شده و نشان داده که این روش قادر به شناسایی منابع ناکارایی در سطح سازمانی است [3]. با این حال، کاربرد DEA در سطح فردی دانش‌آموزان یا دانشجویان به مراتب کمتر بوده است [4]. یکی از محدود مطالعاتی است که کارایی فردی دانش‌آموزان را با DEA بررسی کرده و بر لزوم در نظر گرفتن چند خروجی هم‌زمان (مانند نمرات مختلف دروس) تاکید کرده است [5]. به‌طور مشابه، با استفاده از روش‌های پارامتریک و غیرپارامتریک، کارایی تحصیلی را در سطح فردی تحلیل کرده و نشان داده که این رویکرد می‌تواند تفاوت‌های فردی را به خوبی آشکار کند [6].

در مرحله دوم تحلیل DEA ، بررسی عوامل محیطی موثر بر کارایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. روش دومرحله‌ای DEA با استفاده از رگرسیون بوت‌استرپ معرفی شده که به دلیل حذف بایاس و در نظر گرفتن وابستگی‌های آماری، به استاندارد در پژوهش‌های دومرحله‌ای تبدیل شده است [7]. در حوزه آموزش، مطالعات متعددی از این رویکرد استفاده کرده‌اند [8]. با این حال، کاربرد روش‌های ساده‌تر مانند همبستگی برای شناسایی روابط اولیه بین کارایی و عوامل محیطی نیز در برخی پژوهش‌ها دیده می‌شود، به‌ویژه زمانی که هدف، شناسایی الگوهای کلی بدون فرض مدل رگرسیونی پیچیده است [9].

عوامل محیطی موثر بر عملکرد تحصیلی نیز در ادبیات گسترده‌ای بررسی شده‌اند. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که جنسیت، محل سکونت، وضعیت خانوادگی، حمایت آموزشی و تمایل به تحصیل در دانشگاه از عوامل کلیدی تأثیرگذار هستند [10]. با این وجود، ترکیب این عوامل با مدل‌های DEA در سطح فردی دانش‌آموزان و به‌ویژه در درس ریاضی، خلا پژوهشی قابل توجهی را نشان می‌دهد.

قبل از این مطالعه، هرچند پژوهش‌های متعددی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها به ارزیابی کارایی مدارس و دانشگاه‌ها پرداخته‌اند، اما کاربرد این روش در سطح فردی دانش‌آموزان، به‌ویژه در درس ریاضی، همچنان محدود بوده است. بیشتر مطالعات پیشین بر ارزیابی کارایی در سطح نهادی تمرکز کرده‌اند و کمتر به بررسی کارایی فردی با در نظر گرفتن ورودی‌های قابل کنترل و عوامل محیطی پرداخته‌اند. علاوه بر این، ترکیب مدل BCC ورودی محور با قیود اطمینان و استفاده از تحلیل همبستگی اسپیرمن در سطح فردی، خلا قابل توجهی در ادبیات موجود به شمار می‌رود.

این پژوهش با تمرکز بر سطح فردی دانش‌آموزان، استفاده از مدل BCC ورودی محور و ترکیب آن با تحلیل همبستگی اسپیرمن، تلاش می‌کند تا خلا موجود در ادبیات را پر کند و به درک بهتری از عوامل محیطی موثر بر کارایی تحصیلی دست یابد.

۳- روش شناسی

این پژوهش از رویکرد دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی فردی دانش‌آموزان در درس ریاضی استفاده کرده است. در مرحله اول، امتیاز کارایی هر دانش‌آموز با استفاده از مدل BCC ورودی محور محاسبه شد. در مرحله دوم، رابطه بین امتیاز کارایی و عوامل محیطی با

بهره‌گیری از ضریب همبستگی اسپیرمن بررسی گردید. در ادامه، جامعه آماری، داده‌ها، مدل *DEA* و روش تحلیل مرحله دوم به تفصیل شرح داده می‌شود.

۱-۳- جامعه آماری و داده‌ها

داده‌های این مطالعه از مجموعه معتبر عملکرد دانش‌آموزان پرتغال استخراج شده است که شامل اطلاعات ۳۹۵ دانش‌آموز دوره متوسطه دوم است. پس از بررسی اولیه و حذف مشاهدات با نمره نهایی صفر، تعداد جامعه نهایی به ۳۵۷ مشاهده رسید. این پالایش به منظور رعایت پیش‌فرض‌های مدل *DEA* در خصوص مقادیر مثبت ورودی‌ها و خروجی‌ها انجام شد. متغیرهای ورودی شامل پنج عامل زیر است که همگی به‌عنوان منابع قابل کنترل در فرایند یادگیری در نظر گرفته شدند:

۱. زمان مطالعه هفتگی: تعداد ساعت مطالعه در هفته خارج از کلاس (مقیاس ۱ تا ۴)

۱ = کمتر از ۲ ساعت

۲ = بین ۲ تا ۵ ساعت

۳ = بین ۵ تا ۱۰ ساعت

۴ = بیشتر از ۱۰ ساعت در هفته

۲. تعداد غیبت‌ها: تعداد روزهای غیبت از مدرسه در طول سال تحصیلی.

۳. تعداد شکست‌های قبلی: تعداد پایه‌هایی که دانش‌آموز مردود شده یا تکرار کرده است.

۴. زمان رفت‌وآمد به مدرسه: زمان تقریبی رفت‌وآمد روزانه از خانه به مدرسه (مقیاس ۱ تا ۴)

۱ = کمتر از ۱۵ دقیقه

۲ = بین ۱۵ تا ۳۰ دقیقه

۳ = بین ۳۰ تا ۶۰ دقیقه

۴ = بیشتر از ۱ ساعت

۵. اندازه خانواده: تعداد افراد خانواده (تبدیل به مقیاس ساده ۳ یا ۴)

۳ = خانواده کوچک (۳ نفر یا کمتر)

۴ = خانواده بزرگ‌تر (۴ نفر یا بیشتر)

متغیر خروجی نمره نهایی درس ریاضی است که در مقیاس ۰ تا ۲۰ ثبت شده است. عوامل محیطی (برای مرحله دوم) شامل موارد زیر هستند:

۱. جنسیت

۲. محل سکونت: شهری یا روستایی

۳. وضعیت زندگی والدین: با هم زندگی می‌کنند یا جدا هستند.

۴. تمایل به ادامه تحصیل در دانشگاه: بله یا خیر

۵. حمایت آموزشی مدرسه: دریافت حمایت اضافی از مدرسه (بله یا خیر)

۶. حمایت آموزشی خانواده: دریافت حمایت آموزشی از خانواده (بله یا خیر)

۷. نمره دوره اول: نمره ریاضی دوره اول (مقیاس ۰ تا ۲۰)

۸. زمان آزاد بعد از مدرسه: میزان زمان آزاد روزانه بعد از مدرسه (مقیاس ۱ تا ۵)

۱ = خیلی کم (تقریباً هیچ)

۲ = کم

۳ = متوسط

۴ = زیاد

۵ = خیلی زیاد

۲-۳- مدل تحلیل پوششی داده‌ها (مرحله اول)

برای محاسبه کارایی، مدل BCC ورودی محور انتخاب شد که امکان ارزیابی کارایی فنی خالص را با فرض بازده به مقیاس متغیر فراهم می‌کند و جهت‌گیری ورودی محور بدین جهت انتخاب شد که منابع دانش‌آموز (زمان، انرژی، حمایت و ...) معمولاً محدود هستند و هدف، ارزیابی بهینه‌سازی مصرف این منابع برای رسیدن به نمره نهایی است. این مدل به دلیل انعطاف‌پذیری در مواجهه با مقیاس‌های متفاوت یادگیری و عدم فرض بازده ثابت به مقیاس، مناسب‌ترین گزینه برای داده‌های این پژوهش بود.

جدول ۱- متغیرها و پارامترهای مدل.

Table 1- Model variables and parameters.

نماد	توضیح
k	واحد تحت بررسی
j	واحد‌های تصمیم‌گیری
θ_k	امتیاز کارایی واحد k
λ_j	وزن واحد j
s_i^-	اسلک مازاد ورودی i
s_r^+	اسلک کمبود خروجی r
x_{ij}	مقدار ورودی i برای واحد j
y_{rj}	مقدار خروجی r برای واحد j
α_3	متغیر صحیح برای تعداد شکست‌های قبلی
α_5	متغیر صحیح برای اندازه خانواده

مدل ریاضی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\min \theta_k \quad (1)$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta_k x_{ik} \quad i = 1, \dots, 5. \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk} r = 1. \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1. \quad (4)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 357, s_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, 5, s_r^+ \geq 0 \quad r = 1. \quad (5)$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{1j} \leq 4. \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{2j} \leq 93. \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{3j} = \alpha_3 \alpha_3 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (8)$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{4j} \leq 4. \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{5j} = \alpha_5 \alpha_5 \in \{3, 4\}. \quad (10)$$

به دلیل وجود متغیرهای صحیح α_3 و α_5 مدل به صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح آمیخته^۱ حل گردید.

¹ Mixed Integer Programming (MIP)

توضیح قیود مدل

رابطه‌های (۱) و (۲) اسلک‌های ورودی و خروجی را محاسبه می‌کنند، رابطه (۳) شرط تحدب (بازده به مقیاس متغیر) است، رابطه (۵) محدوده مجاز وزن زمان مطالعه هفتگی در ترکیب مرجع را بین ۱ تا ۴ محدود می‌کند، رابطه (۶) حداکثر تعداد غیبت مجاز در واحد مرجع را ۹۳ روز تعیین می‌کند، رابطه (۷) تعداد شکست‌های قبلی را به عدد صحیح بین ۰ تا ۴ محدود می‌سازد، رابطه (۸) محدوده مجاز زمان رفت‌وآمد به مدرسه را بین ۱ تا ۴ نگه می‌دارد، رابطه (۹) اندازه خانواده را فقط به اعداد صحیح ۳ یا ۴ اجازه می‌دهد.

۳-۳- تحلیل عوامل محیطی (مرحله دوم)

در مرحله دوم، برای بررسی رابطه بین امتیاز کارایی و عوامل محیطی از ضریب همبستگی اسپیرمن استفاده شد. این روش به دلیل ماهیت رتبه‌ای و غیرنرمال توزیع برخی متغیرهای محیطی مانند *yes/no* یا مقیاس محدود انتخاب گردید و سطح معناداری آماري ۰.۰۵ در نظر گرفته شد. این رویکرد دومرحله‌ای با هدف اندازه‌گیری کارایی نسبی و سپس شناسایی عوامل محیطی موثر بر آن طراحی شده است.

۴- نتایج

در این بخش، نتایج حاصل از تحلیل دومرحله‌ای ارائه می‌شود. ابتدا آمار توصیفی داده‌ها توصیف می‌شود، سپس نتایج محاسبه کارایی با مدل *BCC* گزارش می‌گردد و در نهایت، نتایج همبستگی اسپیرمن بین امتیاز کارایی و عوامل محیطی بررسی می‌شود.

۴-۱- آمار توصیفی

جدول ۱ آمار توصیفی متغیرهای ورودی و خروجی را نشان می‌دهد. میانگین زمان مطالعه هفتگی ۲.۰۴ (انحراف معیار ۰.۹۰) بود که نشان‌دهنده پراکندگی در عادت‌های مطالعاتی دانش‌آموزان است. میانگین تعداد غیبت‌ها ۷.۲۹ (انحراف معیار ۶.۲۲) بود، با حداکثر ۷۵ روز غیبت که بیانگر تنوع قابل توجه در این متغیر است. تعداد شکست‌های قبلی میانگین ۰.۴۷ (انحراف معیار ۰.۹۰) داشت و زمان رفت‌وآمد به مدرسه میانگین ۱.۵۲ (انحراف معیار ۰.۷۲) بود. اندازه خانواده میانگین ۳.۴۴ (انحراف معیار ۰.۴۹) بود. نمره نهایی درس ریاضی میانگین ۱۱.۹۱ (انحراف معیار ۳.۲۹) داشت، با حداقل ۱ و حداکثر ۲۰.

جدول ۲- آمار توصیفی متغیرهای ورودی و خروجی.

متغیر	میانگین	انحراف معیار	حداقل	حداکثر
زمان مطالعه هفتگی	2.04	0.90	1	4
تعداد غیبت‌ها	7.29	6.22	0	75
تعداد شکست‌های قبلی	0.47	0.90	0	3
زمان رفت‌وآمد به مدرسه	1.52	0.72	1	4
اندازه خانواده	3.44	0.49	3	4
نمره نهایی	11.91	3.29	1	20

جدول ۲ آمار توصیفی عوامل محیطی را نشان می‌دهد. نمره دوره اول میانگین ۱۱.۵۶ (انحراف معیار ۳.۰۷) داشت. زمان آزاد بعد از مدرسه میانگین ۳.۲۶ (انحراف معیار ۰.۹۶) بود. درصد دانش‌آموزان با تمایل به ادامه تحصیل در دانشگاه ۹۰٪ بود، حمایت آموزشی مدرسه ۱۵٪، حمایت آموزشی خانواده ۶۴٪، جنسیت مذکر ۴۸٪، سکونت شهری ۷۵٪ و والدین با هم زندگی می‌کنند ۸۹٪ بود.

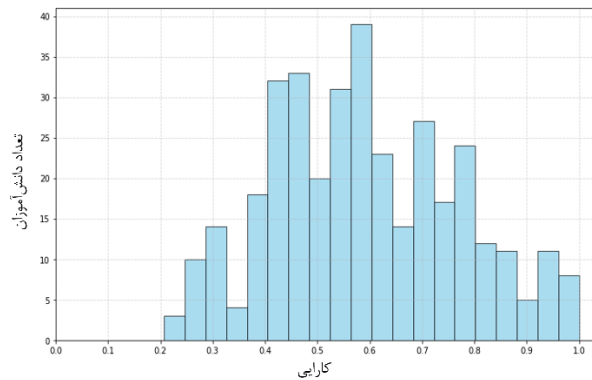
جدول ۳- آمار توصیفی عوامل محیطی.

Table 3- Descriptive statistics of environmental factors.

عامل محیطی	درصد یا میانگین	توضیح
جنسیت (مذکر)	48%	-
محل سکونت (شهری)	78%	-
وضعیت زندگی والدین (با هم)	89%	-
تمایل به ادامه تحصیل (بله)	90%	-
حمایت آموزشی مدرسه (بله)	15%	-
حمایت آموزشی خانواده (بله)	64%	-
نمره دوره اول	۱۱.۵۶ (انحراف معیار ۳/۰۷)	مقیاس ۰ تا ۲۰
زمان آزاد بعد از مدرسه	۳.۲۶ (انحراف معیار ۰/۹۶)	مقیاس ۱ تا ۵

۴-۲- نتایج مرحله اول: محاسبه کارایی با مدل BCC

نتایج مدل BCC ورودی محور نشان داد که میانگین کارایی جامعه ۰.۶۰ است که سطح متوسطی از کارایی را در درس ریاضی نشان می دهد. تعداد ۱۰ دانش آموز ۸٪/۲ کارا (امتیاز ۱.۰۰) تشخیص داده شدند. حداقل کارایی ۰.۲۰۶ و حداکثر ۱.۰۰ بود. توزیع امتیازها در شکل ۱ نشان داده شده است که بیشتر دانش آموزان ۶۵٪ در بازه ۰.۴ تا ۰.۸ قرار دارند.



شکل ۱- توزیع امتیاز کارایی دانش آموزان.

Figure 1- Distribution of students' performance scores.

واحدهای کارا عمدتاً ویژگی هایی مانند عدم شکست قبلی، نمرات نهایی بالا (۱۸-۲۰) و در برخی موارد عملکرد قوی علی رغم غیبت بالا داشتند. برای مثال، یکی از واحدهای کارا با ۱۰ روز غیبت نمره ۱۹ گرفته که نشان دهنده بهره‌وری بالا در شرایط محدودکننده است.

۴-۳- نتایج مرحله دوم: همبستگی اسپیرمن

جدول ۴- ضرایب همبستگی اسپیرمن.

Table 4- Spearman correlation coefficients.

عامل محیطی	ضریب (ρ)	p-Value	معنادار (p < 0.05)
نمره دوره اول	0.8336	0.0000	بله
حمایت آموزشی مدرسه	-0.2236	0.0000	بله
سکونت شهری	0.1779	0.0007	بله
جنسیت مذکر	0.1351	0.0106	بله
تمایل به دانشگاه	0.1098	0.0382	بله
حمایت خانواده	-0.0951	0.0728	خیر
وضعیت والدین	-0.0307	0.5628	خیر
زمان آزاد	-0.0151	0.7755	خیر

جدول ۳ ضرایب همبستگی اسپیرمن بین امتیاز کارایی و عوامل محیطی را نشان می‌دهد. نتایج همبستگی اسپیرمن روابط معناداری را نشان می‌دهد که در **جدول ۳** خلاصه شده است. برای روشن شدن تفسیر هر ضریب، توضیحات زیر ارائه می‌شود:

۱. نمره دوره اول با ضریب 0.8336 +: قوی‌ترین رابطه مثبت و معنادار نشان می‌دهد که عملکرد تحصیلی در دوره اول، مهم‌ترین پیش‌بینی‌کننده کارایی نهایی در درس ریاضی است؛ یعنی دانش‌آموزانی که پایه قوی‌تری دارند، با همان منابع ورودی، خروجی بهتری تولید می‌کنند.
۲. حمایت آموزشی مدرسه با ضریب 0.2236 -: رابطه منفی معنادار به دلیل ماهیت جبرانی این حمایت است؛ مدرسه معمولاً حمایت اضافی را به دانش‌آموزان با عملکرد ضعیف‌تر اختصاص می‌دهد تا نمره نهایی‌شان را بهبود بخشد؛ بنابراین، دانش‌آموزانی که این حمایت را دریافت می‌کنند، از ابتدا کارایی پایین‌تری داشته‌اند و این رابطه منفی، نتیجه انتخاب معکوس است نه تاثیر منفی مستقیم حمایت بر کارایی.
۳. سکونت شهری با ضریب 0.1779 +: رابطه مثبت معنادار بیانگر آن است که دانش‌آموزان ساکن شهر به دلیل دسترسی بهتر به امکانات آموزشی، معلمان باکیفیت‌تر و منابع یادگیری بیشتر، کارایی بالاتری نسبت به دانش‌آموزان روستایی دارند.
۴. جنسیت مذکر با ضریب 0.1351 +: رابطه مثبت معنادار نشان می‌دهد که در این جامعه، پسران نسبت به دختران کارایی بالاتری در درس ریاضی نشان داده‌اند که ممکن است به تفاوت‌های انگیزشی، اعتمادبه‌نفس در دروس فنی یا روش‌های یادگیری جنسیتی مرتبط باشد.
۵. تمایل به ادامه تحصیل در دانشگاه با ضریب 0.1098 +: رابطه مثبت معنادار حاکی از نقش قوی انگیزه و هدف‌گذاری آینده است؛ دانش‌آموزانی که قصد ادامه تحصیل در دانشگاه دارند، معمولاً تلاش و تمرکز بیشتری روی درس ریاضی می‌گذارند و کارایی بالاتری نشان می‌دهند.
۶. حمایت آموزشی خانواده با ضریب 0.0951 -: رابطه منفی ضعیف و غیرمعنادار نیز عمدتاً جبرانی است؛ خانواده‌ها بیشتر زمانی حمایت آموزشی (مانند کلاس خصوصی یا نظارت بر تکالیف) ارائه می‌دهند که فرزندشان در درس ریاضی ضعیف عمل کرده باشد؛ بنابراین، دانش‌آموزانی که این حمایت را دریافت می‌کنند، اغلب از قبل کارایی پایین‌تری داشته‌اند و این ضریب منفی، نتیجه تلاش جبرانی خانواده است نه تاثیر منفی حمایت.
۷. وضعیت زندگی والدین با ضریب 0.0307 -: رابطه منفی بسیار ضعیف و غیرمعنادار بیانگر آن است که زندگی مشترک والدین در این جامعه تاثیر مستقیمی بر کارایی تحصیلی نداشته یا تحت تاثیر عوامل میانجی دیگر (مانند حمایت عاطفی یا اقتصادی) قرار گرفته است.
۸. زمان آزاد بعد از مدرسه با ضریب 0.0151 -: رابطه منفی بسیار ضعیف و غیرمعنادار نشان می‌دهد که میزان زمان آزاد روزانه تاثیر قابل توجهی بر کارایی نداشته و احتمالاً کیفیت استفاده از این زمان (مثلاً مطالعه یا تفریح مفید) تعیین‌کننده‌تر از مقدار آن است.

۵- نتیجه‌گیری

یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که کارایی فردی دانش‌آموزان در درس ریاضی، نتیجه تعامل پیچیده‌ای میان منابع ورودی (زمان مطالعه، غیبت، شکست‌های قبلی، رفت‌وآمد و اندازه خانواده) و عوامل محیطی است. محاسبه کارایی با مدل BCC ورودی محور، میانگین کارایی 0.60 را نشان داد که بیانگر سطح متوسط و وجود پتانسیل قابل توجه برای بهبود عملکرد تحصیلی است. تعداد محدود واحدهای کارا (۱۰ مورد، $2/8\%$) و تمرکز توزیع امتیازها در بازه متوسط (0.4 تا 0.8) تاکید می‌کند که بیشتر دانش‌آموزان می‌توانند با مدیریت بهتر ورودی‌ها، کارایی‌شان را افزایش دهند.

یکی از یافته‌های برجسته، کارایی بالا در برخی واحدهای علی‌رغم محدودیت‌های ورودی (مانند غیبت ۱۰ روزه با نمره نهایی ۱۹) بود. این نتیجه نشان می‌دهد که کارایی تحصیلی لزوماً به حجم منابع وابسته نیست، بلکه به کیفیت بهره‌وری، انگیزش درونی و استراتژی‌های یادگیری فردی نیز بستگی دارد. این الگو می‌تواند به درک جدیدی از عملکرد در شرایط نامساعد منجر شود و سیاست‌گذاران را به سمت تقویت عوامل انگیزشی (به‌جای تمرکز صرف بر افزایش منابع) سوق دهد.

در مرحله دوم، همبستگی اسپیرمن روابط معناداری را آشکار کرد. قوی‌ترین رابطه مثبت با نمره دوره اول ($p < 0.0001$, $\rho = 0.8336$) تایید می‌کند که عملکرد اولیه، پایه و پیش‌بینی‌کننده اصلی کارایی نهایی است و بر لزوم مداخلات آموزشی در سال‌های ابتدایی تاکید کرد. روابط مثبت با سکونت شهری ($\rho = 0.1779$)، جنسیت مذکر ($\rho = 0.1351$) و تمایل به ادامه تحصیل ($\rho = 0.1098$) نیز نشان‌دهنده تاثیر عوامل محیطی است و ضرورت سیاست‌گذاری‌های عدالت‌محور (مانند تقویت زیرساخت‌های آموزشی روستایی و برنامه‌های انگیزشی جنسیتی) را برجسته می‌کند.

رابطه منفی با حمایت آموزشی مدرسه ($p < 0.001$, $\rho = -0.2236$) در نگاه اول غیرمنتظره به نظر می‌رسد، اما ماهیت جبرانی این حمایت‌ها آن را توضیح می‌دهد؛ حمایت مدرسه بیشتر به دانش‌آموزان با عملکرد ضعیف‌تر اختصاص می‌یابد تا نمره نهایی‌شان را جبران کند. این یافته نه تنها

نشان‌دهنده انتخاب معکوس است، بلکه تاکید می‌کند که برنامه‌های حمایتی باید از حالت صرفاً جبرانی به سمت پیشگیرانه تغییر جهت دهند تا اثربخشی واقعی داشته باشند.

این پژوهش با تمرکز بر سطح فردی دانش‌آموزان و ترکیب مدل *BCC* با همبستگی اسپیرمن، نوآوری‌هایی در ارزیابی کارایی تحصیلی ایجاد می‌کند و نشان می‌دهد که کارایی نه‌تنها به منابع ورودی، بلکه به تعامل عوامل محیطی وابسته است. پیشنهادها عملی شامل تقویت برنامه‌های آموزشی پایه‌ای در سال‌های ابتدایی، کاهش نابرابری‌های منطقه‌ای در دسترسی به منابع و بازطراحی حمایت‌های آموزشی به صورت فراگیر (برای همه دانش‌آموزان، نه فقط ضعیف‌ترها) است. این پیشنهادها می‌تواند در نظام آموزشی ایران، با توجه به چالش‌های مشابه مانند نابرابری منطقه‌ای و عملکرد متوسط در آزمون‌های بین‌المللی ریاضی، کاربرد داشته باشد.

محدودیت‌های پژوهش شامل تمرکز بر داده‌های پرتغال (که ممکن است با شرایط فرهنگی، آموزشی و اقتصادی ایران متفاوت باشد) و عدم استفاده از مدل‌های پویا مانند *Malmquist* برای تحلیل تغییرات زمانی است. همچنین، تعداد جامعه (۳۵۷) برای تعمیم‌پذیری کلی کافی است، اما بررسی داده‌های بزرگ‌تر می‌تواند نتایج را تقویت کند.

برای تحقیقات آینده، پیشنهاد می‌شود این رویکرد در داده‌های ایرانی (مانند نتایج آزمون‌های *TIMSS*، نهایی یا کنکور) اعمال شود و با ترکیب روش‌های پیشرفته‌تر مانند یادگیری ماشین (رندوم فارست یا شبکه‌های عصبی) برای پیش‌بینی کارایی، ابعاد جدیدی به پژوهش اضافه گردد. این مطالعه نه‌تنها به درک بهتری از کارایی در آموزش ریاضی منجر می‌شود، بلکه زمینه‌ای برای سیاست‌گذاری‌های مبتنی بر شواهد فراهم می‌کند تا آموزش ریاضی به سطح بالاتری از عدالت، بهره‌وری و کارایی برسد.

منابع

- [1] Villegas-Ch, W., Gutierrez, R., Jaramillo-Alcazar, A., & Maldonado-Navarro, A. (2026). Integrating artificial intelligence and data envelopment analysis for sustainable efficiency assessment in higher education. *Computers and education: artificial intelligence*, 10, 100557. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2026.100557>
- [2] Shero, J. A., Otaiba, S. Al, Schatschneider, C., & Hart, S. A. (2022). Data envelopment analysis (DEA) in the educational sciences. *The journal of experimental education*, 90(4), 1021–1040. <https://doi.org/10.1080/00220973.2021.1906198>
- [3] Almeida, J. P. L. De, Anjos, F. H. Dos, Moreira, M. F., Bermejo, P. H. De S., Prata, D. N., & Rodrigues, W. (2025). University efficiency evaluation using data envelopment analysis: Future research agenda. *Cogent education*, 12(1), 2445964. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2445964>
- [4] Popović, M., Savić, G., Kuzmanović, M., & Martić, M. (2020). Using data envelopment analysis and multi-criteria decision-making methods to evaluate teacher performance in higher education. *Symmetry*, 12(4), 563. <https://doi.org/10.3390/sym12040563>
- [5] Kuah, C. T., & Wong, K. Y. (2011). Efficiency assessment of universities through data envelopment analysis. *Procedia computer science*, 3, 499–506. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2010.12.084>
- [6] Rao, M. V. S. (1975). Socio-economic indicators for development planning. *International social science journal*, 27(1), 121. https://openurl.ebsco.com/EPDB%3Aagcd%3A13%3A6643533/detailv2?sid=ebsco%3Aplink%3Ascholar&id=ebsco%3Aagcd%3A5624141&crl=c&link_origin=scholar.google.com
- [7] Moradi-Motlagh, A., & Emrouznejad, A. (2022). The origins and development of statistical approaches in non-parametric frontier models: A survey of the first two decades of scholarly literature (1998–2020). *Annals of operations research*, 318(1), 713–741. <https://doi.org/10.1007/s10479-022-04659-7>
- [8] Izadikhah, M., Azadi, E., Azadi, M., Farzipoor Saen, R., & Toloo, M. (2022). Developing a new chance constrained NDEA model to measure performance of sustainable supply chains. *Annals of operations research*, 316(2), 1319–1347. <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03765-8>
- [9] Preeti, P., Dixit, D., & Garg, V. (2024). Analyzing the development of data envelopment analysis research. *2024 4th international conference on advancement in electronics & communication engineering (AECE)* (pp. 330–334). IEEE. <https://doi.org/10.1109/AECE62803.2024.10911300>
- [10] Hanushek, E. A., & Woessmann, L. (2008). The role of cognitive skills in economic development. *Journal of economic literature*, 46(3), 607–68. <https://doi.org/10.1257/jel.46.3.607>